Series SMA

कोड नं.
Code No. **65/1**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जायेगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) *सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न पत्र में **29** प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स । खण्ड अ में **10** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में **12** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड स में **7** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।*

(iii) *खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है ।*

General Instructions :

(i) *All questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of **29** questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of **10** questions of **one mark** each, Section B comprises of **12** questions of **four marks** each and Section C comprises of **7** questions of **six marks** each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is **not** permitted.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Question numbers 1 to 10 carry 1 mark each.

1. द्विआधारी संक्रिया $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a * b = 2a + b$ द्वारा परिभाषित है । $(2 * 3) * 4$ ज्ञात कीजिए ।

The binary operation $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is defined as $a * b = 2a + b$. Find $(2 * 3) * 4$.

2. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए ।

Find the principal value of $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$.

3. निम्नलिखित समीकरण से $x + y$ का मान ज्ञात कीजिए :

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

Find the value of $x + y$ from the following equation :

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

4. यदि $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो $A^T - B^T$ ज्ञात कीजिए ।

If $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, then find $A^T - B^T$.

5. माना A, 3×3 कोटि का एक वर्ग आव्यूह है । $|2A|$ का मान लिखिए, जहाँ $|A| = 4$ है ।

Let A be a square matrix of order 3×3. Write the value of $|2A|$, where $|A| = 4$.

6. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

Evaluate :

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

7. दिया गया है कि $\int e^x (\tan x + 1) \sec x \, dx = e^x f(x) + c$ है ।

तो वह f(x) लिखिए जो उपर्युक्त को संतुष्ट करता है ।

Given $\int e^x (\tan x + 1) \sec x \, dx = e^x f(x) + c$.

Write f(x) satisfying the above.

8. $(\hat{i} \times \hat{j}) \cdot \hat{k} + \hat{i} \cdot \hat{j}$ का मान लिखिए ।

Write the value of $(\hat{i} \times \hat{j}) \cdot \hat{k} + \hat{i} \cdot \hat{j}$

9. सदिश $\overrightarrow{AB}$, जिसका प्रारंभिक बिन्दु A(2, 1) तथा अन्तिम बिन्दु B(– 5, 7) है, के अदिश घटक ज्ञात कीजिए ।

Find the scalar components of the vector $\overrightarrow{AB}$ with initial point A(2, 1) and terminal point B(– 5, 7).

10. मूल बिन्दु से समतल $3x - 4y + 12z = 3$ की दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the distance of the plane $3x - 4y + 12z = 3$ from the origin.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है ।

Question numbers 11 to 22 carry 4 marks each.

11. निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1}\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{5\sqrt{13}}$$

Prove the following :

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cot^{-1}\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{5\sqrt{13}}$$

12. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4\ abc$$

Using properties of determinants, show that

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4\ abc$$

13. दर्शाइए कि $f : N \to N$, जो निम्न द्वारा प्रदत्त है,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{यदि } x \text{ विषम है} \\ x-1, & \text{यदि } x \text{ सम है} \end{cases}$$

एकैकी तथा आच्छादक दोनों है ।

अथवा

द्विआधारी संक्रियाओं $* : R \times R \to R$ तथा $o : R \times R \to R$, जो $a * b = |a - b|$ तथा $a o b = a$, सभी $a, b \in R$ के लिए, द्वारा परिभाषित हैं, पर विचार कीजिए । दर्शाइए कि '$*$' क्रमविनिमेय है परन्तु साहचर्य नहीं है, 'o' साहचर्य है परन्तु क्रमविनिमेय नहीं है ।

Show that $f : N \to N$, given by

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{if } x \text{ is odd} \\ x-1, & \text{if } x \text{ is even} \end{cases}$$

is both one-one and onto.

OR

Consider the binary operations $* : R \times R \to R$ and $o : R \times R \to R$ defined as $a * b = |a - b|$ and $a \, o \, b = a$ for all $a, b \in R$. Show that '$*$' is commutative but not associative, 'o' is associative but not commutative.

14. यदि $x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}$, $y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

अथवा

$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}\right]$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए ।

If $x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}$, $y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$, show that $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

OR

Differentiate $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}\right]$ with respect to x.

15. यदि $x = a(\cos t + t \sin t)$ तथा $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$ है, तो $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए ।

If $x = a(\cos t + t \sin t)$ and $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, find $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$.

16. एक 5 मी. लंबी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है । सीढ़ी का नीचे का सिरा, पृथ्वी के अनुदिश, दीवार से दूर 2 सेमी/से. की दर से खींचा जाता है । दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4 मी. दूर है ?

A ladder 5 m long is leaning against a wall. The bottom of the ladder is pulled along the ground, away from the wall, at the rate of 2 cm/s. How fast is its height on the wall decreasing when the foot of the ladder is 4 m away from the wall ?

17. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Evaluate :

$$\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx$$

OR

Evaluate :

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

18. द्वितीय चतुर्थांश में ऐसे वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षों को स्पर्श करते हैं ।

अथवा

अवकल समीकरण $x(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} = 1$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जब $x = 2$ है, तो $y = 0$ है ।

Form the differential equation of the family of circles in the second quadrant and touching the coordinate axes.

OR

Find the particular solution of the differential equation

$x(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} = 1;\ \ y = 0$ when $x = 2.$

19. निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(1 + x^2)\,dy + 2xy\,dx = \cot x\,dx;\ \ x \neq 0$$

Solve the following differential equation :

$$(1 + x^2)\,dy + 2xy\,dx = \cot x\,dx;\ \ x \neq 0$$

20. माना $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ है । एक सदिश $\vec{p}$ ज्ञात कीजिए जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों पर लम्ब है तथा $\vec{p} \cdot \vec{c} = 18$ है ।

Let $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ and $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$. Find a vector $\vec{p}$ which is perpendicular to both $\vec{a}$ and $\vec{b}$ and $\vec{p} \cdot \vec{c} = 18$.

21. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दुओं A(3, 4, 1) तथा B(5, 1, 6) को मिलाने वाली रेखा XY-तल को काटती है ।

Find the coordinates of the point where the line through the points A(3, 4, 1) and B(5, 1, 6) crosses the XY-plane.

22. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते उत्तरोत्तर (बिना प्रतिस्थापना के) निकाले जाते हैं । लाल रंग के पत्तों की संख्या का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

Two cards are drawn simultaneously (without replacement) from a well-shuffled pack of 52 cards. Find the mean and variance of the number of red cards.

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है ।

Question numbers 23 to 29 carry 6 marks each.

23. आव्यूहों का प्रयोग करके, निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$2x + 3y + 3z = 5, \quad x - 2y + z = -4, \quad 3x - y - 2z = 3$$

Using matrices, solve the following system of equations :

$$2x + 3y + 3z = 5, \quad x - 2y + z = -4, \quad 3x - y - 2z = 3$$

24. सिद्ध कीजिए कि एक दिए गए शंकु के अन्तर्गत महत्तम वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल वाले लंब-वृत्तीय बेलन की त्रिज्या, शंकु की त्रिज्या की आधी होती है ।

अथवा

दिए गए c^2 वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाले एक गत्ते में से ऊपर से खुला एक बक्सा जिसका आधार वर्गाकार है, बनाया जाना है । दर्शाइए कि बक्से का अधिकतम आयतन $\frac{c^3}{6\sqrt{3}}$ घन इकाई है ।

Prove that the radius of the right circular cylinder of greatest curved surface area which can be inscribed in a given cone is half of that of the cone.

OR

An open box with a square base is to be made out of a given quantity of cardboard of area c^2 square units. Show that the maximum volume of the box is $\frac{c^3}{6\sqrt{3}}$ cubic units.

25. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2 (x + 3)} \, dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

OR

Evaluate :

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2 (x + 3)}\, dx$$

26. $\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4,\ x + y \ge 2\}$ द्वारा प्रदत्त क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Find the area of the region $\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4,\ x + y \ge 2\}$.

27. यदि रेखाएँ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-2k} = \frac{z-3}{2}$ तथा $\frac{x-1}{k} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{5}$ लम्बवत् हैं, तो k का मान ज्ञात कीजिए । अतः उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो इन रेखाओं को अन्तर्विष्ट करता है ।

If the lines $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-2k} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{x-1}{k} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{5}$ are perpendicular, find the value of k and hence find the equation of plane containing these lines.

28. माना एक लड़की एक पासा उछालती है । यदि उसे 5 या 6 की संख्या प्राप्त होती है, तो वह एक सिक्के को तीन बार उछालती है और चितों की संख्या नोट करती है । यदि उसे 1, 2, 3 या 4 की संख्या प्राप्त होती है, तो वह एक सिक्के को एक बार उछालती है और यह नोट करती है कि उसे चित या पट प्राप्त हुआ । यदि उसे ठीक एक चित प्राप्त होता है, तो उसके द्वारा उछाले गए पासे पर 1, 2, 3 या 4 प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है ?

Suppose a girl throws a die. If she gets a 5 or 6, she tosses a coin 3 times and notes the number of heads. If she gets 1, 2, 3 or 4 she tosses a coin once and notes whether a head or tail is obtained. If she obtained exactly one head, what is the probability that she threw 1, 2, 3 or 4 with the die ?

29. एक आहार-विज्ञानी दो प्रकार के भोज्यों को इस प्रकार मिलाना चाहता है कि मिश्रण में विटामिन A का घटक कम-से-कम 8 मात्रक और विटामिन C का घटक कम-से-कम 10 मात्रक हो । भोज्य I में 2 मात्रक विटामिन A प्रति किग्रा और 1 मात्रक विटामिन C प्रति किग्रा है जबकि भोज्य II में 1 मात्रक विटामिन A प्रति किग्रा और 2 मात्रक विटामिन C प्रति किग्रा है । प्रति किग्रा भोज्य I को खरीदने में ₹ 5 तथा प्रति किग्रा भोज्य II को खरीदने में ₹ 7 लगते हैं । उपर्युक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ़ द्वारा हल करके प्रति किग्रा मिश्रण का न्यूनतम मूल्य ज्ञात कीजिए ।

A dietician wishes to mix two types of foods in such a way that the vitamin contents of the mixture contains at least 8 units of vitamin A and 10 units of vitamin C. Food I contains 2 units/kg of vitamin A and 1 unit/kg of vitamin C while Food II contains 1 unit/kg of vitamin A and 2 units/kg of vitamin C. It costs ₹ 5 per kg to purchase Food I and ₹ 7 per kg to purchase Food II. Determine the minimum cost of such a mixture. Formulate the above as a LPP and solve it graphically.